Recordar que las **simetrías** de un espacio métrico E son las transformaciones de E que preservan su forma y la de todos sus subconjuntos, es decir, sus isometrías.

Algo que distingue al plano euclidiano de otras superficies es que tiene muchísimas simetrías, que son las transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones y sus composiciones).

· Dados dos puntos del plano existe una isometría que lleva uno al otro.

· Dadas dos líneas del plano existe una isometría que lleva una a otra.

Estas dos propiedades dicen que el plano euclidiano es **homogeneo** (se ve igual desde todos los puntos) e **isotrópico** (se ve igual en todas las direcciones).

Teorema. Dados dos tríangulos abc y $a'b'c'$ con lados correspondientes iguales, existe una isometria que lleva uno al otro- Si los triángulos no son equilateros o isosceles, la isometría es única.

Demostración. Para probar la existencia basta observar que podemos llevar el tríángulo abc al triángulo $a'b'c'$ usando 1, 2 o 3 reflexiones. $\square$

Teorema. Cada isometria del plano está determinada por las imágenes de 3 puntos no alineados.

Demostración. Basta observar que la posición de cualquier punto del plano está determinada por sus distancias a cualesquiera 3 puntos no alineados (ya que 3 círculos con centros no alineados se cruzan en a lo mas un punto). $\square$

Los argumentos anteriores muestran que todas las isometrías del plano son composiciones de a lo mas 3 reflexiones. Las que preservan orientación deben ser composiciones de 2 reflexiones, así que son traslaciones y rotaciones.

Otra superficie con muchas simetrias es la esfera, que también es homogénea e isotropica. Esto podemos probarlo viendo que podemos llevar cualquier punto de la esfera a cualquier otro reflejando la esfera en un plano por el origen y que también podemos llevar cualquier círculo máximo de la esfera a cualquier otro usando una reflexión. De aqui se sigue que dados dos triángulos en la esfera con lados correspondientes iguales, existe una isometría de la esfera, que es una composición de a lo mas 3 reflexiones, que lleva uno al otro (y si los triángulos no son equiláteros o isosceles la isometría es única).

En general las superficies tienen muchas menos simetrías que el plano o la esfera.

¿Habrán otras superficies homogeneas e isotropicas ademñas del plano y la esfera?

Ejemplo. Un toro de revolución admite una infinidad de rotaciones, pero no es homogéneo; no puede haber isometrias que lleven puntos donde la curvatura es positiva a otros donde es negativa.

Pero el toro topológico admite otras formas geométricas, y hay algunas que son homogéneas.

Ejemplo. El toro en $\mathbb{R}^4$ parametrizado por $\phi(u,v) = (cos(u), sen(u), cos(v), sen(v))$ es homogéneo, ya que podemos ver a $\mathbb{R}^4$ como el producto de dos planos $R^2 \times R^2$ y girar el primer plano un ángulo r y el segundo plano un ángulo s para llevar cualquier punto del toro a cualquier otro (la rotación envía el punto $(cos(u), sen(u), cos(v), sen(v))$ al punto $(cos(u+r), sen(u+r), cos(v+s), sen(v+s)))$ Esto muestra que este toro es homogéneo, y por lo tanto su curvatura gaussiana debe ser la misma en todos los puntos, y como por el teorema de gauss bonnet la integral de la curvatura de cualquier toro es 0, la curvatura de este toro debe ser 0, por esto es llamado el **toro plano**.

Y que pasara con otras superficies?

Ejemplo. El plano proyectivo se puede obtener tomando un hemisferio de la esfera e identificando los pares de puntos antípodas del ecuador, esto equivale a tomar toda la esfera e identificar todos sus pares de puntos antípodas. Observar que el mapeo antípoda (que lleva cada punto de la esfera a su antípoda) es una simetría de la esfera que lleva a cada círculo máximo al mismo círculo y el plano tangente en un punto al plano tangente de su antípoda. Así que podemos definir un vector tangente al plano proyectivo como un par de vectores antípodas, el plano tangente en cada punto del plano proyectivo como el par de planos tangentes antípodas identificados, y darle una métrica al plano proyectivo usando la métrica de la esfera, definiendo el producto punto entre dos vectores tangentes al mismo punto del plano proyectivo como el producto punto de los vectores correspondientes en el mismo plano tangente a la esfera.

Esto muestra que el plano proyectivo admite una métrica riemanniana con curvatura gaussiana $K \equiv 1$. Como las simetrías de la esfera mandan antípodas en antípodas, todas las simetrias de la esfera *se proyectan* a simetrias del plano proyectivo, y se puede mostrar que el plano proyectivo es homogéneo e isotrópico (tarea)

Problemas.

1. Muestra que todas las isometrias de la esfera que preservan orientación son rotaciones.
2. Muestra que el plano proyectivo es homogéneo e isotrópico.
3. ¿Puedes mostrar que el toro plano no es isotrópico?

¿Podremos darles formas geométricas mas simétricas a las otras superficies topológicas o no?

Lo primero que necesitamos para que una superficie se vea igual desde todos sus puntos es que que localmente sea igual en todos los puntos, y para esto necesitamos que que su curvatura gaussiana sea constante. ¿Existirán otros planos distintos del euclidiano y el proyectivo que sean homogéneos e isotrópicos? ¿Existirá un plano con curvatura constante negativa?

El plano hiperbólico.

Recordar que un modelo parcial de un *plano* en el que no se cumplen todos los axiomas de Euclides está formado por los puntos del interior del disco unitario $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 < 1\}$ y donde las líneas son los arcos de círculos dentro del disco que son ortogonales al círculo unitario.

El modelo no está completo porque no hemos dicho como medir distancias ni ángulos, así que no podemos hablar de congruencias ni de transformaciones rígidas.

Vamos a hacerlo al revés, diciendo cuales queremos que sean las transformaciones rígidas y hallar la métrica riemanniana que las hace isometrías.

Queremos que las inversiones en círculos tomen el papel de las reflexiones. Esto es razonable porque las inversiones fijan los puntos de los círculos donde se hacen e intercambian los lados del círculo.

Si pensamos en los puntos del plano como números complejos, la inversión en un círculo de radio r centrado en 0 está dada por la función $i_{(o,r)}(z) = \frac{r^2}{\bar{z}}$ y la inversión en un círculo de radio r centrado en el complejo a se obtiene moviendo a al 0 con la traslación $z \to z-a$, invirtiendo en el círculo centrado en 0 y regresando el 0 a a con la traslación $z \to z+a$, es decir $z \to z-a \to \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}} \to \frac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$, o sea $i_{(a,r)}(z) = \frac{\bar{z}a+r^2-|a|^2}{\bar{z}-\bar{a}}$

Para que el círculo de radio r centrado en a sea perpendicular al círculo unitario $z\bar{z} = 1$ se debe cumplir $1^2 + r^2 = |a|^2$ o sea $r^2 = |a|^2 - 1$ por lo que la inversión en ese círculo es $i_a(z) = \frac{\bar{z}a-1}{\bar{z}-\bar{a}}$

La inversión $i_a(z)$ no preserva las distancias euclidianas, para ver como las cambia usamos análisis complejo: aunque $i_a(z)$ no es derivable como función compleja, su conjugada $\bar{i}_a(z) = \frac{\bar{a}z-1}{z-a}$ si lo es, y su derivada es

$$\frac{d}{dz}\bar{i}_a(z) = \frac{\bar{a}z-1}{z-a} = \frac{\bar{a}(z-a)-1(\bar{a}z-1}{(z-a)^2} = \frac{|a|^2-1}{(z-a)^2}.$$

Recordar que si una función compleja $f(z)$ es derivable en z y su derivada no es 0 entonces la función preserva ángulos y estira lo mismo en todas las direcciones (en el punto z la función gira un angulo $arg(f'(z))$ y estira por $|f'(z)|$).

Así que $i_a(z)$, que es conjugada de $\bar{i}_a(z)$, también preserva ángulos y estira por $|\bar{i}_a(z)| = \frac{|a|^2-1}{|z-a|^2}$.

Definamos la norma hiperbólica de cada vector v basado en un punto z del interior del disco como la norma euclidiana de v multiplicada por $\frac{c}{1-|z|^2}$ (para alguna constante $c > 0$, que luego fijaremos) y definamos los ángulos hiperbólico como los ángulos euclidianos. Esto da una métrica en el interior del disco unitario, llamada la métrica hiperbólica.

Lema. Con la métrica hiperbólica todas las funciones $|\bar{i}_a(z)|$ son isometrias.

Demostración. La norma hiperbólica de un vector basado en z es su norma euclidiana multiplicada por $\frac{c}{1-|z|^2}$ y la norma hiperbólica de un vector basado en $i_a(z)|$ es su a norma euclidiana multiplicada por

$$\frac{c}{1-|i_a(z)|^2} = \frac{c}{1-|\frac{\bar{z}a-1}{\bar{z}-\bar{a}}|^2} = \frac{c}{1-\frac{(\bar{z}a-1)(z\bar{a}-1)}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}} = \frac{c}{\frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})-(\bar{z}a-1)(z\bar{a}-1)}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}} =$$

$$= \frac{c}{\frac{|z|^2+|a|^2-|z|^2|a|2-1}{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}} = \frac{c}{\frac{(1-|z|^2)(|a|^2-1)}{|z-a|^2}} = \frac{c|z-a|^2}{(1-|z|^2)(|a|^2-1)}$$

Así que la razón entre las normas hiperbólicas de dos vectores con la misma norma euclidiana en z y en $i_a(z)$ es $\frac{|z-a|^2}{|a|^2-1}$, que es el inverso del factor de estiramiento de la función $i_a(z)$, $\frac{|a|^2-1}{|z-a|^2}$. $\square$

El plano hiperbólico puede parametrizarse con la función identidad $\phi(u,v) = (u,v)$, y con esta parametrización la primera forma fundamental de la métrica hiperbólica es

$$\begin{bmatrix} \frac{c^2}{(1-u^2-v^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{(1-u^2-v^2)^2} \end{bmatrix}$$

(donde los cuadrados aparecen porque en la diagonal están los cuadrados de las normas de los vectores (1,0) y (0,1) y los 0's aparecen porque los vectores (1,0) y (0,1) siguen siendo ortogonales)

El hecho de que el plano hiperbólico admita isometrias que envían cualquier punto a cualquier otro dice que el plano hiperbólico tiene curvatura gaussiana constante, pero no dice cual es. Podemos calcular su curvatura a partir de la primera forma fundamental, usando la formula de gauss

y el resultado es $-c^2/4$. Variando la constante c obtenemos métricas con cualquier curvatura constante negativa, y si tomamos $c = 2$ obtenemos una métrica con curvatura gaussiana -1.

Lema. Las geodésicas del plano hiperbólico son los arcos de círculos ortogonales al círculo unitario.

Demostración. Sean p y q son dos puntos del plano hiperbólico y sea l la línea hiperbolica que los contiene. Si la geodésica hiperbólica g que une a p y q no fuera l, la reflexión en l daría otra geodésica

$I(g)$ entre p y q. Pero el teorema local de Gauss Bonnet implica que en un plano con curvatura menor o igual a 0 solo puede haber una geodésica entre dos puntos (tarea).

Lema. Si dos triángulos hiperbólicos tienen los mismos ángulos entonces son congruentes.

Demostración.

Los puntos al infinito (tambien llamados puntos ideales) del plano hiperbólico corresponden a los puntos del círculo unitario del plano euclidiano. Observar que por cada par de puntos ideales pasa una línea hiperbólica (esto no ocurre en el plano euclidiano) y dos lineas hiperbólicas con el mismo punto ideal son tangentes en el infinito (ya que están representadas por arcos de círculos que son perpendiculares al circulo unitario).

Un triángulo ideal está formado por 3 líneas hiperbólicas con 3 vértices ideales.

Lema. Todos los triángulos hiperbólicos ideales son congruentes.

Demostración. Basta ver que si a, b, c sy a', b', c' son 2 tercias de puntos ideales del plano hiperbólico, entonces existe una isometría del plano hiperbólico que lleva a, b, c a a', b', c', esto puede hacerse usando a lo mas 3 reflexiones, como se hace para el caso de dos triangulos hiperbólicos con lados iguales.

El teorema de Gauss Bonnet implica que las superficie de genero mayor que 1 no pueden admiten métricas con curvatura constante mayor o igual a 0.

Teorema. Las superficies orientables de género mayor o igual a 2 admiten una métrica de curvatura constante -1.

Demostración.

Problemas.

4. Muestra que en el plano hiperbólico existe 3 puntos no alineados por los que no pasa ningún círculo.
5. Demuestra que en un plano con curvatura gaussiana menor o igual a 0 solo puede haber una geodésica entre dos puntos.
6. ¿Cual es el área de los triángulos hiperbolicos ideales? (aproxímalo con triángulos hiperbolicos normales y usa Gauss-Bonnet y un limite)

7. Muestra que la botella de Klein admite una métrica riemannniana de curvatura constante 0.

8. Demuestra que las superficies cerradas orientables de genero mayor que 1 no admiten métricas de curvatura gaussiana mayor o igual a 0, y que los mismo ocurre para las superficies cerradas no orientables de genero mayor que 2.

9. Demuestra que las superficies cerradas no orientables de genero mayor que 2 admiten métricas riemannnianas de curvatura constante -1.